

基于稀疏贝叶斯学习的大规模多用户检测算法

陈平平^{1,2}, 王宣达^{1,2}, 谢肇鹏¹, 方毅³, 陈家辉¹

(1. 福州大学先进制造学院, 福建 泉州 362251;
2. 福建省媒体信息智能处理与无线传输重点实验室, 福建 福州 350108;
3. 广东工业大学信息工程学院, 广东 广州 510006)

摘要: 针对现有算法大都基于高斯逆伽马先验模型的稀疏贝叶斯学习 (GIG-SBL), 忽略了稀疏解所对应的支撑集向量稀疏性的问题, 提出一种基于伯努利高斯逆伽马先验模型的稀疏贝叶斯学习 (BGIG-SBL) 架构, 通过引入一个伯努利先验的二元向量, 设计了单测量向量 (SMV) 的 BGIG-SBL-SMV 算法, 结合支撑集向量的稀疏性提高重构性能。进一步将该算法扩展到多测量向量 (MMV) 方案, 通过共享相同控制稀疏解的超参数, 利用 MMV 的联合稀疏性提出 BGIG-SBL-MMV 算法。实验结果表明, 所提 BGIG-SBL-SMV 算法相较于传统 GIG-SBL-SMV 算法, 在 mMTC 用户检测场景可实现 2 dB 的性能增益; 同时, 所提 BGIG-SBL-MMV 算法相对于单测量向量 BGIG-SBL-SMV 算法, 用户检测率和数据检错率的性能增益可达到 4 dB, 证明了所提算法的优越性。

关键词: 稀疏贝叶斯学习; 压缩感知; 多用户检测; 海量机器通信

中图分类号: TN929.5

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2023204

Sparse Bayesian learning-based massive multi-user detection algorithm

CHEN Pingping^{1,2}, WANG Xuanda^{1,2}, XIE Zhaopeng¹, FANG Yi³, CHEN Jiahui¹

1. School of Advanced Manufacturing, Fuzhou University, Quanzhou 362251, China
2. Fujian Provincial Key Laboratory of Intelligent Processing and Wireless Transmission of Media Information, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China
3. College of Information Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China

Abstract: Aiming at the problem that most existing algorithms were based on the Gaussian inverse gamma prior model (GIG-SBL), which ignored the sparsity of the support set vector within the sparse solution, a sparse Bayesian learning framework based on the Bernoulli Gaussian inverse gamma prior model (BGIG-SBL) was proposed. By introducing a binary vector of Bernoulli prior, the BGIG-SBL-SMV algorithm based on single measurement vector (SMV) was designed, which utilized the sparsity of the support set vector to improve reconstruction performance. Then the proposed algorithm was extended to multiple measurement vector (MMV) models by sharing the same hyperparameters. The BGIG-SBL-MMV algorithm was developed based on the joint sparsity of MMV. The experimental results show that the proposed BGIG-SBL-SMV can achieve a performance gain of 2 dB in mMTC over the traditional GIG-SBL-SMV. Moreover, BGIG-SBL-MMV has a performance gain of 4 dB as compared with its SMV counterparts, which demonstrates the advantages of the proposed schemes.

Keywords: sparse Bayesian learning, compressive sensing, multi-user detection, mMTC

收稿日期: 2023-07-19; 修回日期: 2023-10-13

通信作者: 谢肇鹏, xzp_fzu@163.com

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62171135); 福建省杰出青年基金资助项目 (No.2022J06010); 福建省技术创新重点攻关基金资助项目 (No.2023XQ004)

Found Items: The National Natural Science Foundation of China (No.62171135), Fujian Province Distinguished Talent Project (No.2022J06010), Key Technology Development Project of Fujian Province (No.2023XQ004)

0 引言

5G 海量机器类通信 (mMTC, massive machine type communication) 场景如今受到广泛关注, 并被应用于工业自动化、自动驾驶、智慧城市等物联网领域。在 mMTC 通信场景下, 传统的基于调度的正交多址接入方案已经无法满足需求。由于基站要为每台设备分配正交的时间或频率资源, 当设备的总数远多于资源的总数时, 复杂的调度过程会导致显著信令开销和过多时延^[1], 这在发送零星短数据包的场景中效率很低。为了克服上述缺点, 研究者提出一种免授权非正交多址接入 (GF-NOMA, grant-free non-orthogonal multiple access) 方案, 允许设备在相同的时间或频率资源上传输数据符号而不需要依赖基站授权^[2-3]。用户在传输过程中不需要基站的上行授权, 而是随机自主地传输数据, 因此基站并没有来自用户的任何先验信息, 需要进行多用户检测, 在接收到信号后能够识别所有发送信息的活跃用户集合, 从而检测出它们发送的数据。

在 mMTC 传输场景中, 活跃用户数一般远少于总用户数, 即活跃用户是稀疏的, 这就使原先的多用户检测问题能够转换为稀疏信号的重构问题。传统的压缩感知算法, 如正交匹配追踪^[4]、分段正交匹配追踪^[5]等经典贪婪算法已经被广泛应用。Wang 等^[6]利用 mMTC 系统中活跃用户固有结构稀疏性提出一种结构化迭代支持检测算法, 能够在连续的时隙中联合检测活跃用户和其传输的数据。利用前一时隙估计的传输符号和活跃用户集作为先验知识, 一种交替方向乘法算法可以提高多用户检测性能^[7]。文献[8-9]研究了基于期望传播的联合活跃用户检测、信道估计和数据检测的方法。通过改进识别序列, 将正弦扩频序列应用于 mMTC 的扩频序列, 一种非迭代、低复杂度的算法被用于多用户检测^[10]。

然而, 上述方法得出的往往不是最优的稀疏解, 贝叶斯算法证明在多数情况可以实现最优的稀疏解。Tipping 等^[11]提出了一种稀疏贝叶斯学习 (SBL, sparse Bayesian learning) 算法, 用于机器学习中的回归和分类。Wipf 等^[12-13]将 SBL 算法引入压缩感知 (CS, compressive sensing) 领域, 针对单测量向量 (SMV, single measurement vector) 模型稀疏信号进行恢复, 并扩展到多测量向量 (MMV,

multiple measurement vector) 模型推导出 MSBL (multiple SBL) 算法。Zhang 等^[14]研究了块稀疏贝叶斯学习框架, 将 MMV 模型转化为具有块状结构的 SMV 模型, 探索时间相关性进而提出了 T-SBL 和 T-MSBL 算法。Fang 等^[15]则提出了支撑集辅助的稀疏贝叶斯学习算法, 应用一部分已知的先验支撑集信息, 在参数上增加了第三层先验, 表征稀疏控制的超参数。Fang 等^[16]研究了结构化配对的稀疏贝叶斯学习算法, 将每个单独的超参数与每个系数独立关联, 而每个系数不仅涉及其自身的超参数, 还涉及近邻的超参数。

由于传统 SBL 算法在实现每次迭代时使用矩阵求逆, 对于高维度数据复杂性太高, 因此文献[17]研究了基于高斯广义近似消息传递稀疏贝叶斯学习算法, 通过使用该算法实现 SBL 算法中的期望最大化步骤, 显著降低了计算复杂度。近几年, 基于 SBL 的各种改进算法已经在 mMTC 多用户检测中被广泛应用^[18-22]。

现有 SBL 算法都是基于高斯逆伽马 (GIG, Gaussian inverse Gamma) 先验模型, 没有考虑稀疏信号所对应的支撑集中存在的稀疏性, 即稀疏信号中的元素是稀疏的, 那么其所对应的支撑集向量也是稀疏的。因此, 为了更好地利用这个特性, 本文提出了一种伯努利高斯逆伽马 (BGIG, Bernoulli Gaussian inverse Gamma) 先验模型。该先验模型首先引入了一个服从伯努利分布的二元向量作为支撑集向量, 通过 SBL 算法进行学习, 促进重构解的稀疏性。接着, 利用信号在时隙场景传输中所具备的联合稀疏性, 通过共享一个服从伽马分布的超参数来增强该重构性质, 从而将该模型推广到了 MMV 场景中。最后, 在 GF-NOMA 系统中多个时隙内多用户检测实验结果表明, 本文提出的 BGIG-SBL 算法和 BGIG-SBL-MMV 算法检测性能优于现有的 GIG-SBL 算法。

1 系统模型

本文考虑了一个 GF-NOMA 的 mMTC 多用户上行链路系统, 共有 K 个用户 ($K > 100$), 系统模型如图 1 所示。

每个用户配有一根发送天线且基站配有一根接收天线。系统使用 N 个子载波来传输信号, 其中 $N < K$ 。基站在第 n 个子载波上接收到的信号可以表示为

$$y_n = \sum_{k=1}^K g_{nk} \varphi_{nk} x_k + v_n, n=1,2,\dots,N \quad (1)$$

其中, x_k 代表第 k 个用户所发送的符号; φ_{nk} 代表长度为 K 的扩频序列 φ_k 上的第 n 个分量; g_{nk} 代表用户所在的第 n 个子载波上的信道增益, 是一个具有零均值和单位方差的独立同分布复高斯变量。也就是说, 本文考虑的是瑞利衰落信道, 该模型广泛应用于无线通信中^[23]。 v_n 代表第 n 个子载波均值为 0、方差为 η^2 的加性白高斯噪声。

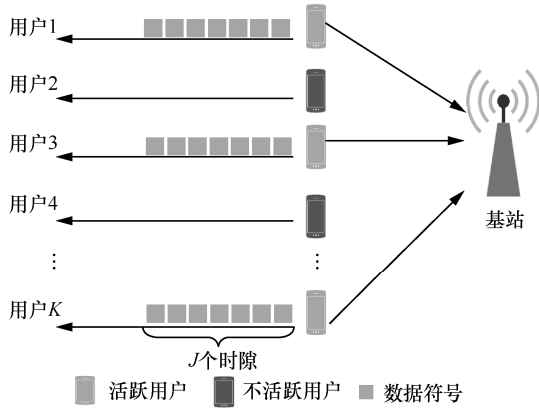


图 1 系统模型

基站合并 N 个子载波上的接收信号, 接收信号向量可以进一步表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_k]^T \\ \mathbf{v} &= [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \end{aligned}$$

\mathbf{H} 是一个大小为 $N \times K$ 的等效信道矩阵, 第 n 行第 k 列所对应元素 $h_{nk} = g_{nk} \varphi_{nk}$, \mathbf{h}_k 代表等效信道矩阵 \mathbf{H} 的第 k 列, \mathbf{h}_n 代表 \mathbf{H} 的第 n 行。如果考虑信号是连续 J 个时隙发送, 则有

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{H}_j \mathbf{x}_j + \mathbf{v}_j, j=1,2,\dots,J \quad (3)$$

其中, \mathbf{y}_j 代表第 j 个时隙接收到的信号向量; \mathbf{H}_j 代表第 j 个时隙的等效信道矩阵, 其具体形式是不同时隙内的信道增益 $g_{nk}(j)$ 乘相同的扩频矩阵 φ_{nk} ; \mathbf{x}_j 代表第 j 个时隙发送的信号向量; \mathbf{v}_j 代表第 j 个时隙高斯噪声向量。本文假设用户在发送多个时隙的信号时, 活跃用户索引是不变的。这使信号获得了联合稀疏的先验特征, 使用此特征将有助于提升稀疏信号的重构性能^[24]。

2 GIG-SBL 算法

2.1 分层贝叶斯模型

先回顾一下传统的分层贝叶斯模型, 其通过添加 GIG 先验模型来重构稀疏解。

在传统的分层贝叶斯模型中, 似然函数一般假设服从高斯分布, 即 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \varepsilon) \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{x}, \varepsilon^{-1}\mathbf{I}_N)$ 。 \mathbf{I}_N 是大小为 $N \times N$ 的单位矩阵。

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \varepsilon) = 2\pi^{-\frac{N}{2}} \varepsilon^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2} \quad (4)$$

先验函数分为两层, 在第一层中, 发送信号 \mathbf{x} 通常被假设服从具有零均值的高斯先验分布, 即 $p(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\tau}^{-1})$ 。 \mathbf{x} 的每个分量 x_k 均采用高斯分布建模, 即

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\tau}) = \prod_{k=1}^K p(x_k | 0, \tau_k^{-1}) = 2\pi^{-K} |\hat{\boldsymbol{\tau}}| e^{(-\mathbf{x}^T \hat{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{x})} \quad (5)$$

其中, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_k]$, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \text{diag}(\boldsymbol{\tau})$ 。

第二层中, 假设超参数 $\boldsymbol{\tau}$ 服从伽马分布, 即 $p(\boldsymbol{\tau}) \sim \text{Gamma}(a, b)$ 。 $\boldsymbol{\tau}$ 是非负超参数, a 是形状参数, b 是尺度参数。本文把参数 a 和 b 设为非常小的值, 即 10^{-4} 。之所以假设超参数 $\boldsymbol{\tau}$ 服从伽马分布, 是因为伽马分布是高斯分布的共轭先验。因此其后验分布和先验分布形式相近, 意味着当获得新的数据时能够通过参数更新获得新的后验分布, 此后验分布将会在下次新数据到来的时候成为新的先验分布。再更新后验分布就不需要通过大量的计算, 即

$$p(\boldsymbol{\tau}) = \prod_{k=1}^K p(\tau_k | a, b) = \prod_{k=1}^K \Gamma(a)^{-1} b^a \tau_k^{a-1} e^{-b\tau_k} \quad (6)$$

其中, $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ 。

假设噪声参数 ε 也服从伽马分布, 即 $p(\varepsilon) \sim \text{Gamma}(c, d)$ 。设超参数 $c, d = 10^{-4}$, 有

$$p(\varepsilon) = p(\varepsilon|c, d) = \Gamma(c)^{-1} c^d \varepsilon^{c-1} e^{-d\varepsilon} \quad (7)$$

基于 GIG 先验的概率图模型如图 2 所示。

2.2 GIG-SBL-SMV 算法

接收端目标是根据单接收信号向量 \mathbf{y} 恢复出稀疏信号 \mathbf{x} 。从图 2 可以看出, \mathbf{y} 分别由 2 个变量 \mathbf{x}, ε 控制。超参数 $\boldsymbol{\tau}$ 负责控制稀疏信号 \mathbf{x} 的精度, $\boldsymbol{\tau}, \varepsilon$ 分别取决于超参数 a, b 和 c, d 。

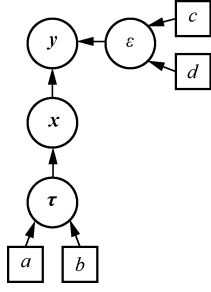


图 2 基于 GIG 先验的概率图模型

在 GIG-SBL-SMV 算法中, 接收端的后验概率分布 $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \varepsilon | \mathbf{y})$ 在实际中往往无法直接算出。可用变分贝叶斯推断使用另一个模型分布 $q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \varepsilon)$ 近似表示。根据平均场理论, 该分布可以被完全因式分解为相互独立变量的后验概率分布, 即

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \varepsilon | \mathbf{y}) \approx q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}, \varepsilon) = q(\mathbf{x})q(\boldsymbol{\tau})q(\varepsilon) \quad (8)$$

这里, 在更新一个变量的同时, 其他变量的最新分布保持固定^[18]

$$q(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \varepsilon)_{q(\boldsymbol{\tau})q(\varepsilon)} + \text{constant} \quad (9)$$

$$q(\boldsymbol{\tau}) = p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \varepsilon)_{q(\mathbf{x})q(\varepsilon)} + \text{constant} \quad (10)$$

$$q(\varepsilon) = p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})_{q(\mathbf{x})q(\boldsymbol{\tau})} + \text{constant} \quad (11)$$

对于向量变量 \mathbf{z} , 其估计期望值 $\tilde{\mathbf{z}}$ 定义为

$$\tilde{\mathbf{z}} := \langle \mathbf{z} \rangle_{q(\mathbf{z})} \quad (12)$$

此时, 稀疏信号 \mathbf{x} 的更新规则为^[15]

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &\propto \langle p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \varepsilon) p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\tau}) \rangle_{q(\boldsymbol{\tau})q(\varepsilon)} \\ q(\mathbf{x}) &\propto e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T (\mathbf{D} + \tilde{\varepsilon} \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \mathbf{x} - 2\tilde{\varepsilon} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y})} \langle \hat{\boldsymbol{\tau}} \rangle_{q(\boldsymbol{\tau})} = \\ &\langle \text{diag}(\boldsymbol{\tau}) \rangle_{q(\boldsymbol{\tau})} = \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \text{diag}(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \dots, \tilde{\tau}_k) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{D} := \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\tau}})$ 。可以得到 $q(\mathbf{x})$ 服从均值为 $\tilde{\mathbf{x}}$ 、方差为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的高斯分布, 即 $q(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Phi})$, 更新式如下

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = (\mathbf{D} + \tilde{\varepsilon} \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (15)$$

另外, 精度 $\boldsymbol{\tau}$ 的更新规则为

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{\tau}) &\propto \langle p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\tau}) p(\boldsymbol{\tau}) \rangle_{q(\mathbf{x})q(\varepsilon)} \propto \\ &\langle p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\tau}) \rangle_{q(\mathbf{x})} p(\boldsymbol{\tau} | a, b) \propto \\ &\boldsymbol{\tau}^{\left(a + \frac{1}{2}\right) - 1} e^{-\left(b + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2)\right) \boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma}^2$ 代表所求协方差矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 中对应的对角线

元素, $\boldsymbol{\sigma}^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2] = \text{diag}(\boldsymbol{\Phi})$, 得到 $q(\boldsymbol{\tau})$ 服从伽马分布, 即

$$q(\boldsymbol{\tau}) \sim \text{Gamma}\left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2)\right) \quad (17)$$

进一步地, 可以得到 $\boldsymbol{\tau}$ 的更新结果为

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \frac{a + \frac{1}{2}}{b + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2)} \quad (18)$$

最后, 噪声参数 ε 的更新规则为^[18]

$$\begin{aligned} q(\varepsilon) &\propto \langle p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \varepsilon) \rangle_{q(\mathbf{x})} p(\varepsilon | c, d) \propto \\ &\varepsilon^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon \langle \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \rangle_{q(\mathbf{x})}} \varepsilon^{c-1} e^{-d\varepsilon} \propto \\ &\varepsilon^{\left(c + \frac{N}{2}\right) - 1} e^{-\varepsilon \left(d + \frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2\right)} \end{aligned} \quad (19)$$

可以验证出 $q(\varepsilon)$ 服从伽马分布, 即

$$q(\varepsilon) \sim \text{Gamma}\left(c + \frac{N}{2}, d + \frac{1}{2}(\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2)\right) \quad (20)$$

因此, 可以得到 ε 的更新结果为

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{c + \frac{N}{2}}{d + \frac{1}{2}(\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}\|_2^2)} \quad (21)$$

传统 GIG-SBL-SMV 算法总结如算法 1 所示。

算法 1 GIG-SBL-SMV 算法

$\tilde{\mathbf{x}} = \text{GIG-SBL-SMV}(\mathbf{y}, \mathbf{H})$

步骤 1 初始化参数, $a = b = c = d = 10^{-4}$;

步骤 2 当 $\|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_{\text{old}}\|_2^2$ 大于设定好的迭代阈值或

者迭代次数达到最大迭代次数时, 停止迭代

步骤 3 按照式(14)和式(15)更新 $\tilde{\mathbf{x}}$

步骤 4 按照式(18)更新 $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$

步骤 5 按照式(21)更新 $\tilde{\varepsilon}$

步骤 6 $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{old}} = \tilde{\mathbf{x}}$, 返回步骤 2

3 BGIG-SBL 算法

现有 SBL 算法都是基于上述 GIG 先验模型进行研究的, 忽略了稀疏解中所对应的支撑集中存在的稀疏性。本文提出了一种新的基于伯努利高斯逆伽马的稀疏贝叶斯学习算法, 解决稀疏信号重构问题。不同于传统 GIG 模型, 本文在新先验模型中引入了伯努利先验。该先验参数是一个二元向量, 即其元素为 0 或 1, 可通过基于分层贝叶斯模型的 SBL

算法进行学习。另外，本文利用发送信号所具有的联合稀疏性先验这一特点，通过共享一个控制稀疏度的超参数来提升信号的重构性能。

3.1 BGIG-SBL-SMV 算法

在伯努利高斯逆伽马模型中，稀疏解定义为 $\mathbf{s} \circ \mathbf{x}$ ，其中， \mathbf{s} 为二进制支撑集向量，表示稀疏解中非零元素的位置； \mathbf{x} 为重构稀疏解； \circ 为哈达玛积，这里表示 2 个向量中的对应元素相乘。先验参数 \mathbf{s} 结合了一个参数 γ 来决定重构稀疏信号所对应的支持集中存在的稀疏性。

本文假设向量 \mathbf{s} 中的各个元素 s_k 服从伯努利分布，即 $p(s_k) \sim \text{Bernoulli}(\gamma_k)$ ，以及

$$p(\mathbf{s}|\boldsymbol{\gamma}) = \prod_{k=1}^K p(s_k|\gamma_k) = \prod_{k=1}^K \gamma_k^{s_k} (1-\gamma_k)^{1-s_k} \quad (22)$$

向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 中的各个元素 γ_k 假设服从贝塔分布，即 $p(\gamma_k) \sim \text{Beta}(\alpha_0, \beta_0)$ 。

$$p(\boldsymbol{\gamma}|\alpha_0, \beta_0) = \frac{\Gamma(\alpha_0 + \beta_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\beta_0)} \boldsymbol{\gamma}^{\alpha_0-1} (1-\boldsymbol{\gamma})^{\beta_0-1} \quad (23)$$

其中， α_0 和 β_0 是支撑集向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的初始超参数，文献[25]证明了为向量 \mathbf{s} 的初始超参数分配较大的值会使信号对应的支撑集中具有更多的连续性，因此这里将超参数 α_0 和 β_0 分别设为 1.4 和 2。这里选择伯努利分布和贝塔分布，是因为两者存在着共轭分布属性。此外，剩下的参数仍与上文提到的 GIG 模型一致，服从相同先验分布，即 $p(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\tau}^{-1})$, $p(\boldsymbol{\tau}) \sim \text{Gamma}(a, b)$, $p(\boldsymbol{\varepsilon}) \sim \text{Gamma}(c, d)$ 。

本文将这种基于单观测向量 \mathbf{y} 的伯努利高斯逆伽马的稀疏贝叶斯学习算法称为 BGIG-SBL-SMV。本文提出的基于 BGIG 先验的概率图模型如图 3 所示。

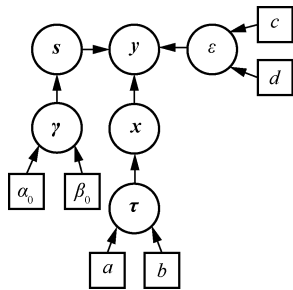


图 3 基于 BGIG 先验的概率图模型

由于本文在传统 GIG 模型中加入了一个支撑集向量 \mathbf{s} ，稀疏解被定义为 $\mathbf{s} \circ \mathbf{x}$ 。因此，尽管 2 个模型中很多参数的先验分布基本是相同的，但是

BGIG-SBL-SMV 中参数的更新规则相较于传统的 GIG 模型有所区别，各个参数的更新规则如下。具体式推导如附录 1 所示。

1) 支撑集向量 \mathbf{s} 的更新规则为

$$q(s_k) \sim \text{Bernoulli} \left(\frac{1}{1 + e^{\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \|\mathbf{h}_k\|_2^2 (\tilde{x}_k^2 + \sigma_k^2) - 2 \tilde{x}_k \mathbf{h}_k^T \tilde{\mathbf{y}}}} \right) \quad (24)$$

进一步地，可以得到参数 \mathbf{s} 中第 k 个元素 s_k 的更新规则为

$$\tilde{s}_k = \frac{1}{1 + e^{\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \|\mathbf{h}_k\|_2^2 (\tilde{x}_k^2 + \sigma_k^2) - 2 \tilde{x}_k \mathbf{h}_k^T \tilde{\mathbf{y}}}} \quad (25)$$

2) 控制支撑集向量 \mathbf{s} 的参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 更新规则为

$$q(\boldsymbol{\gamma}) \sim \text{Beta}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad (26)$$

从而可以得到参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 的更新规则为

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}} \quad (27)$$

其中， $\boldsymbol{\alpha} := \alpha_0 + \tilde{\mathbf{s}}$ ， $\boldsymbol{\beta} := \beta_0 + 1 - \tilde{\mathbf{s}}$ ， $\tilde{\mathbf{s}} = [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_k]^T$ ，

$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]^T$ ， $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]^T$ 。

3) 稀疏信号 \mathbf{x} 的更新规则为

$$q(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Phi}) \quad (28)$$

其均值和方差分别更新如下

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\Phi} \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = (\mathbf{D} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\mu})^{-1} \quad (30)$$

其中

$$\boldsymbol{\mu} := \mathbf{H}^T \mathbf{H} \circ \tilde{\mathbf{s}} \tilde{\mathbf{s}}^T + \text{diag}(\tilde{\mathbf{s}} \circ (1 - \tilde{\mathbf{s}}))$$

$$\mathbf{S} := \text{diag}(\mathbf{s}), \tilde{\mathbf{S}} := \text{diag}(\tilde{\mathbf{s}}) \quad (31)$$

4) 控制稀疏信号 \mathbf{x} 的精度 $\boldsymbol{\tau}$ 更新规则为

$$q(\boldsymbol{\tau}) \sim \text{Gamma} \left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}}^2 + \sigma^2) \right) \quad (32)$$

则参数 $\boldsymbol{\tau}$ 的更新式为

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \frac{a + \frac{1}{2}}{b + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}}^2 + \sigma^2)} \quad (33)$$

5) 噪声参数 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的更新规则为

$$q(\boldsymbol{\varepsilon}) \sim \text{Gamma} \left(c + \frac{N}{2}, d + \frac{1}{2} (\|\mathbf{y} - \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\mathbf{x}})\|_2^2) \right) \quad (34)$$

则 ε 的更新式为

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{c + \frac{N}{2}}{d + \frac{1}{2}(\|\mathbf{y} - \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\mathbf{x}})\|_2^2)} \quad (35)$$

本文提出 BGIG-SBL-SMV 算法如算法 2 所示。

算法 2 BGIG-SBL-SMV 算法

$\tilde{\mathbf{x}} = \text{BGIG-SBL-SMV}(\mathbf{y}, \mathbf{H})$

步骤 1 初始化参数 $a = b = c = d = 10^{-4}, \alpha_0 = 1.4, \beta_0 = 2$

步骤 2 当 $\|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_{\text{old}}\|_2^2$ 大于提前设定好的迭代阈值或者迭代次数达到最大迭代次数时, 停止迭代

步骤 3 按照式(25)更新 \tilde{s}_k

步骤 4 按照式(27)更新 $\tilde{\gamma}$

步骤 5 按照式(29)和式(30)更新 $\tilde{\mathbf{x}}$

步骤 6 按照式(33)更新 $\tilde{\tau}$

步骤 7 按照式(35)更新 $\tilde{\varepsilon}$

步骤 8 $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{old}} = \tilde{\mathbf{x}}$, 返回步骤 2

3.2 BGIG-SBL-MMV 算法

传统基于 MMV 的 SBL 算法将原来单个的观测向量 \mathbf{y} 扩展出 J 个接收时隙的多个接收信号向量 $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_J]$ 并行处理, 而在此过程中, 观测矩阵 Φ 依旧是不变的。通过共享从伽马分布中提取的公共超参数 τ , 与贝叶斯推理相结合生成了一种新的 MSBL 算法^[13]。

然而, 本文考虑的是实际 mMTC 传输场景, 即信道状态在多个时隙内是随机变化的。而之前 mMTC 传输场景中基于 SBL 的多用户检测算法依旧是假设信道增益 g 和扩频矩阵 Φ 在多个时隙内是不变的, 从而也就没有对等效信道矩阵 \mathbf{H} 分时隙来考虑^[20]。本文的 MMV 模型与之前的 MMV 模型不同之处在于, 本文考虑了信道增益 g 在多个时隙发送时是随时间变化的, 这更符合实际 mMTC 无线通信场景。扩频矩阵 Φ 依旧保持不变, 但由于扩频矩阵 Φ 与不同的信道增益 $g_{nk}(j)$ 相乘, 因此等效信道矩阵 \mathbf{H} 划分成了多个时隙 $[\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_J]$ 。

本文将提出的 BGIG-SBL 算法推广到上述的 MMV 模型中, 提出了 BGIG-SBL-MMV 算法, 来进一步提高稀疏信号的重构性能。在该 MMV 模型中, BGIG-SBL-MMV 算法仍假设各参数具有与 3.1 节相同的先验分布, 即

$$\begin{aligned} p(\mathbf{s}_j) &\sim \text{Bernoulli}(\gamma_j), p(\gamma_j) \sim \text{Beta}(\alpha_0, \beta_0) \\ p(\mathbf{x}_j) &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \tau^{-1}), p(\tau) \sim \text{Gamma}(a, b) \\ p(\varepsilon_j) &\sim \text{Gamma}(c, d) \end{aligned} \quad (36)$$

定义对于任意向量 \mathbf{z}_j , 有标量 $z_{k,j} \in \mathbf{z}_j$, $\forall k=1, 2, \dots, K$, $z_{k,j}$ 为第 j 个向量 \mathbf{z}_j 中的第 k 个元素, $j=1, 2, \dots, J$ 。基于 MMV 的 BGIG-SBL 先验概率图模型如图 4 所示。

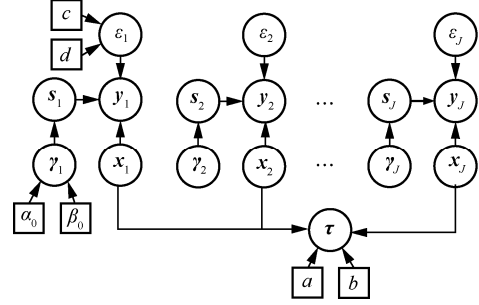


图 4 基于 MMV 的 BGIG-SBL 先验概率图模型

所提 BGIG-SBL-MMV 算法各个参数的更新规则如下, 具体推导如附录 2 所示。

1) 第 j 个时隙支撑集向量 \mathbf{s}_j 的更新规则为

$$q(\mathbf{s}_{k,j}) \sim \text{Bernoulli} \left(\frac{1}{1 + e^{\psi(\beta_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j}) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_j \|\mathbf{h}_{k,j}\|_2^2 (\tilde{x}_{k,j}^2 + \sigma_{k,j}^2) - 2\tilde{x}_{k,j} \mathbf{h}_{k,j}^T \tilde{\mathbf{y}}_j}} \right) \quad (37)$$

进一步地, 可以得到 \mathbf{s}_j 中第 k 个元素 $s_{k,j}$ 的更新式为

$$\tilde{s}_{k,j} = \frac{1}{1 + e^{\psi(\beta_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j}) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_j \|\mathbf{h}_{k,j}\|_2^2 (\tilde{x}_{k,j}^2 + \sigma_{k,j}^2) - 2\tilde{x}_{k,j} \mathbf{h}_{k,j}^T \tilde{\mathbf{y}}_j}} \quad (38)$$

2) 第 j 个时隙的控制 \mathbf{s}_j 的精度参数 γ_j 的更新规则为

$$q(\gamma_j) \sim \text{Beta}(\alpha_j, \beta_j) \quad (39)$$

由此得到参数 γ_j 的更新式为

$$\tilde{\gamma}_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j} \quad (40)$$

其中, $\alpha_j := \alpha_0 + \tilde{s}_j$, $\beta_j := \beta_0 + 1 - \tilde{s}_j$ 。

3) 第 j 个时隙的发送信号 \mathbf{x}_j 的更新规则为

$$q(\mathbf{x}_j) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}_j, \Phi_j) \quad (41)$$

其均值和方差更新式分别为

$$\tilde{\mathbf{x}}_j = \tilde{\varepsilon}_j \Phi_j \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{H}_j^T \mathbf{y}_j \quad (42)$$

$$\Phi_j = (\mathbf{D} + \tilde{\varepsilon}_j \mu_j)^{-1} \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_j &:= \mathbf{H}_j^T \mathbf{H}_j \circ \tilde{\mathbf{s}}_j \tilde{\mathbf{s}}_j^T + \text{diag}(\tilde{\mathbf{s}}_j \circ (1 - \tilde{\mathbf{s}}_j)) \\ \mathbf{S}_j &:= \text{diag}(\mathbf{s}_j), \tilde{\mathbf{S}}_j := \text{diag}(\tilde{\mathbf{s}}_j) \end{aligned} \quad (44)$$

4) 给定 J 个 \mathbf{x}_j 信号控制精度参数 τ 的更新规则为

$$q(\tau) \sim \text{Gamma} \left(a + \frac{J}{2} - 1, b + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \tilde{\mathbf{x}}_j^2 + \sigma_j^2 \right) \quad (45)$$

从而得到参数 τ 的更新式为

$$\tilde{\tau} = \frac{a + \frac{J}{2} - 1}{b + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \tilde{\mathbf{x}}_j^2 + \sigma_j^2} \quad (46)$$

其中, σ_j^2 是协方差矩阵 Φ_j 中对应的对角线元素, 即 $\sigma_j^2 = \text{diag}(\Phi_j)$ 。可以看到, 超参数 $\tilde{\tau}$ 利用 J 个不同时隙的信号参数, 加强了重构解的联合稀疏性, 而且由于与高斯似然共轭, 可以方便地进行贝叶斯推理。

5) 第 j 个时隙噪声参数 ε_j 的更新规则为

$$q(\varepsilon_j) \sim \text{Gamma} \left(c + \frac{N}{2}, d + \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{y}_j - \mathbf{H}_j(\tilde{\mathbf{s}}_j \circ \tilde{\mathbf{x}}_j)\|_2^2 \right) \right) \quad (47)$$

因此, 可以得到参数 ε_j 的更新式为

$$\tilde{\varepsilon}_j = \frac{c + \frac{N}{2}}{d + \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{y}_j - \mathbf{H}_j(\tilde{\mathbf{s}}_j \circ \tilde{\mathbf{x}}_j)\|_2^2 \right)} \quad (48)$$

所提 BGIG-SBL-MMV 算法如算法 3 所示。

算法 3 所提 BGIG-SBL-MMV 算法

$[\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_J] = \text{BGIG-SBL-MMV}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_J, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_J)$

步骤 1 初始化参数: $a = b = c = d = 10^{-4}, \alpha_0 = 1.4, \beta_0 = 2$

步骤 2 当 $\|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_{\text{old}}\|_2$ 大于提前设定好的迭代阈

值或迭代次数达到最大迭代次数时, 停止迭代

步骤 3 按照式(38)更新 $\tilde{\mathbf{s}}_{k,j}$

步骤 4 按照式(40)更新 $\tilde{\mathbf{y}}_j$

步骤 5 按照式(42)和式(43)更新 $\tilde{\mathbf{x}}_j$

步骤 6 按照式(46)更新 $\tilde{\tau}$

步骤 7 按照式(48)更新 $\tilde{\varepsilon}_j$

步骤 8 $\tilde{\mathbf{x}}_{j-\text{old}} = \tilde{\mathbf{x}}_j$, 返回步骤 2

4 算法仿真结果及分析

本节在一个 GF-NOMA 系统中测试所提方案的性能。与文献[7,18]相似, 本文设置该多用户 mMTC 通信中的总用户数 $K=108$, 子载波数 $N=72$, 活跃用户数 $M=12$, 时隙 $J=7$, 采用 BPSK 调制。这里比较不同算法在多时隙传输场景的检测性能, 指标包括误码率 (BER, bit error rate)、活跃度差错率 (AER, activity error rate)、均方误差 (MSE, mean squared error) 和归一化均方误差 (NMSE, normalized mean squared error)。

定义 BER 为重构信号后的错误比特数与总传输比特数的比值, AER 为估计的活跃用户索引出错个数与总活跃用户索引个数的比值。MSE 和 NMSE 分别定义为^[10, 12]

$$\text{MSE} = \frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2^2}{\text{length}(\mathbf{x})} \quad (49)$$

$$\text{NMSE} = \frac{\text{MSE}}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \quad (50)$$

采用 GIG-SBL-SMV 算法^[26]和 GIG-SBL-MMV 算法作为对比算法, 多时隙传输场景下不同 SBL 算法在不同信噪比 (SNR, signal to noise ratio) 下的 BER 如图 5 所示。从图 5 可以看出, 在 SNR=2~8 dB 时, 在单测量向量 SMV 方案下, 本文提出 BGIG-SBL-SMV 的性能优于传统 GIG-SBL-SMV 约 1 dB。这是因为所提方案引入一个二元伯努利向量来学习活跃用户索引的信号稀疏性, 提高了稀疏信号的重构性能。从图 5 还可以看出, 在多测量向量 MMV 架构下, 所提 BGIG-SBL-MMV 算法相对于传统 GIG-SBL-MMV 算法有 2 dB 的性能增益, 同时比单测量向量 BGIG-SBL-SMV 算法有 4 dB 的性能增益。因为前者在处理多个时隙信号时, 共享了控制稀疏解的超参数, 提高了了解的联合稀疏性和重构性能。

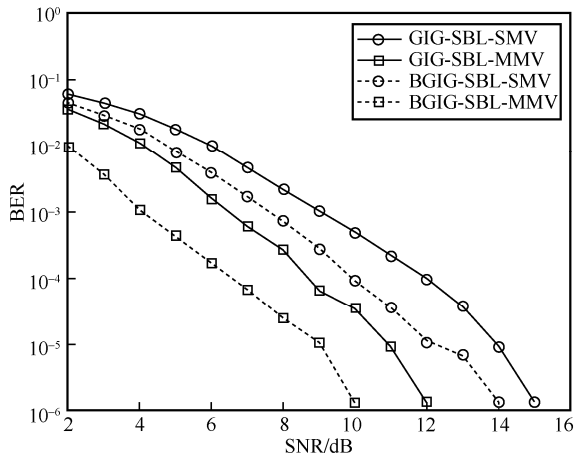


图 5 不同 SBL 算法的 BER

多时隙传输场景下，不同 SBL 算法在不同信噪比下的 AER 如图 6 所示。从图 6 可以看出，在相同的 AER 时，所提 BGIG-SBL-SMV 算法优于传统的 GIG-SBL-SMV 算法约 1 dB，同时与所提 BGIG-SBL-MMV 相差约 2 dB。

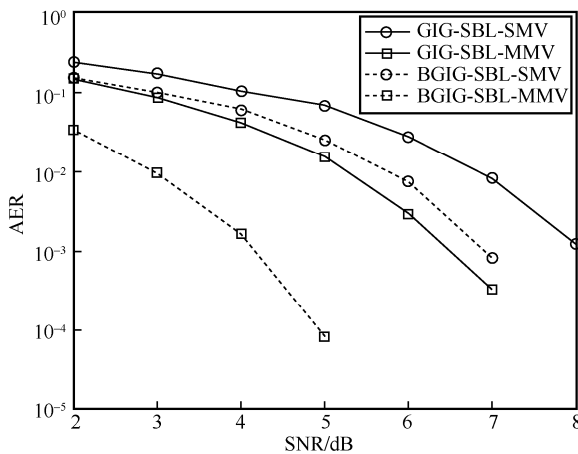


图 6 不同 SBL 算法的 AER

图 7 和图 8 分别展示了不同信噪比下发送端的原始信号与接收端检测出的信号之间的 MSE 与 NMSE。从图中 7 和图 8 可以看出，随着 SNR 的增加，检测出的信号值与原始发送信号值之间的差异会越来越小。所提 BGIG-SBL-MMV 相较于其他算法具有显著的性能优势，具体来说，在 MSE 或 NMSE 相同时，其相较于 GIG-SBL-MMV 有约 2 dB 的性能增益，相比 BGIG-SBL-SMV 有约 4 dB 的性能增益，相较于 GIG-SBL-SMV 有约 5 dB 的性能增益。这是因为 BGIG-SBL-MMV 不仅通过本文提出的二元伯努利向量来学习活跃用户索引，同时在处理多时隙信号时，共享控制重

构稀疏解的超参数，从而保证了估计信号的联合稀疏性。

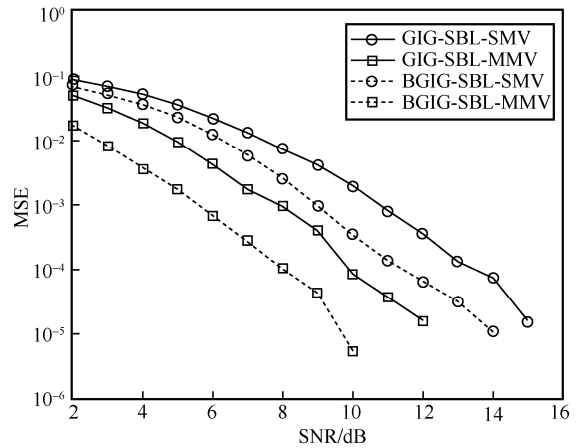


图 7 不同 SBL 算法的 MSE

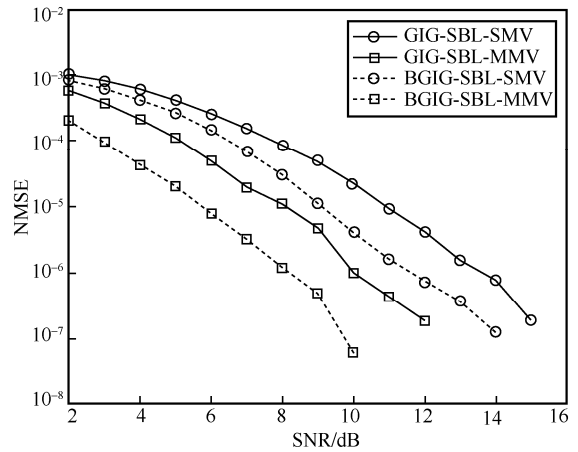


图 8 不同 SBL 算法的 NMSE

不同 SBL 算法在不同活跃用户度 P_a 下的 BER 性能如图 9 所示。从图 9 可以看出，当 SNR=6 dB 时，所提 BGIG-SBL-SMV 算法在 P_a 较小时，即 $P_a < 0.2$ 时，具有良好的检测性能。例如，在 $P_a=0.1$ 时，BGIG-SBL-SMV 算法相较于传统的 GIG-SBL-SMV 算法检测性能更好。但是随着活跃用户度的增加，当活跃用户度大于 0.2 时，BGIG-SBL-SMV 算法检测性能会逐渐和传统的 GIG-SBL-SMV 算法持平。这是因为 SBL 算法本身利用了传输信号的稀疏性，因此其只适用于活跃用户少的场景，不适合活跃用户多的场景。而本文提出的 BGIG-SBL-MMV 算法在不同活跃用户度下相较于其他算法依旧维持着较高的性能。比如 GIG-SBL-MMV 算法在 $P_a=0.1$ 时可达到 BER 在 10^{-3} 数量级，而 BGIG-SBL-MMV 算法在更多活跃用户下，即 $P_a=0.15$ 时，也达到相同的 BER 性能。

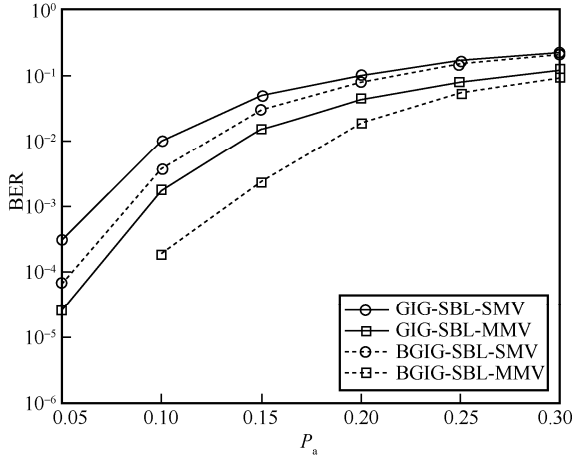


图 9 不同活跃用户度下的仿真结果

5 结束语

本文提出了一种基于伯努利高斯逆伽马先验模型的稀疏贝叶斯学习算法，通过引入一个二元伯努利向量来学习稀疏信号所对应的支撑集中存在的稀疏性。同时将 BGIG-SBL 算法扩展到多测量向量 MMV 模型中，共享了控制稀疏解的超参数，利用了信号的联合稀疏解特点，进一步提升多用户信号的重构性能。实验结果表明，在 mMTC 多用户检测场景中，本文提出的 BGIG-SBL-SMV 以及 BGIG-SBL-MMV 算法的重构性能显著优于现有的 GIG-SBL-SMV 和 GIG-SBL-MMV 算法。此外，基于 MMV 多测量向量的检测方案 BGIG-SBL-MMV 相对单测量向量 BGIG-SBL-SMV 和 GIG-SBL-SMV 方案，分别有 2 dB 和 4 dB 的性能增益，同时能检测更多的活跃用户。

附录 1 BGIG-SBL 算法各参数更新规则推导过程

1) 支撑集向量 \mathbf{s} 更新规则式(25)推导如下^[25,27]

$$\begin{aligned}
 q(\mathbf{s}) &\propto \left\langle p(\mathbf{s}|\boldsymbol{\gamma})p(\mathbf{y}|\mathbf{x},\mathbf{s},\boldsymbol{\varepsilon}) \right\rangle_{q(\mathbf{x})q(\boldsymbol{\varepsilon})q(\boldsymbol{\gamma})} \\
 \ln q(\mathbf{s}) &\propto (s_k(\psi(\alpha_k) - \psi(\alpha_k + \beta_k)) \\
 &\quad ((1-s_k)(\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k + \beta_k))) - \\
 &\quad \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}(\|\mathbf{h}_k\|_2^2(x_k^2 + \sigma_k^2)s_k^2 - 2(\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{h}_k^T \tilde{\mathbf{y}})s_k) \\
 q(\mathbf{s}) &\propto e^{(s_k(\psi(\alpha_k) - \psi(\alpha_k + \beta_k))((1-s_k)(\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k + \beta_k)))} \\
 &\quad e^{-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}(\|\mathbf{h}_k\|_2^2(x_k^2 + \sigma_k^2)s_k^2 - 2(\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{h}_k^T \tilde{\mathbf{y}})s_k)}
 \end{aligned} \tag{51}$$

其中， ψ 是伽马函数的对数导数，即

$$\psi(t) = \frac{d}{dt} \ln \Gamma(t) \tag{52}$$

以及

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \sum_{l \neq k} \mathbf{h}_{nl} s_l x_l, \tilde{\mathbf{y}} = \langle \hat{\mathbf{y}} \rangle_{q(\mathbf{s})q(\mathbf{x})}, \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \sum_{l \neq k} \mathbf{h}_{nl} \tilde{s}_l \tilde{x}_l \tag{53}$$

由于 s_k 是一个随机的二元伯努利变量，因此

$$\begin{cases} q(\mathbf{s}) \propto e^{\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k + \beta_k)}, s_k = 0 \\ q(\mathbf{s}) \propto e^{\psi(\alpha_k) - \psi(\alpha_k + \beta_k) - \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}(\|\mathbf{h}_k\|_2^2(x_k^2 + \sigma_k^2) - 2(\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{h}_k^T \tilde{\mathbf{y}}))}, s_k = 1 \end{cases} \tag{54}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
 q(s_k) &\sim \text{Bernoulli} \left(\frac{q(s_k = 1)}{q(s_k = 0) + q(s_k = 1)} \right) \sim \\
 &\text{Bernoulli} \left(\frac{1}{\frac{q(s_k = 0)}{q(s_k = 1)} + 1} \right)
 \end{aligned} \tag{55}$$

从而有

$$q(s_k) \sim \text{Bernoulli} \left(\frac{1}{1 + e^{\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}(\|\mathbf{h}_k\|_2^2(x_k^2 + \sigma_k^2) - 2\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{h}_k^T \tilde{\mathbf{y}})}} \right) \tag{56}$$

2) 支撑集向量 \mathbf{s} 的参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 更新规则式(26)推导如下

$$\begin{aligned}
 q(\boldsymbol{\gamma}) &\propto \left\langle p(\mathbf{s}|\boldsymbol{\gamma}) \right\rangle_{q(\mathbf{x})q(\mathbf{s})} p(\boldsymbol{\gamma}|\alpha_0, \beta_0) \propto \\
 &\boldsymbol{\gamma}^{(\alpha_0 + \bar{s} - 1)} (1 - \boldsymbol{\gamma})^{(\beta_0 + 1 - \bar{s}) - 1}
 \end{aligned} \tag{57}$$

可以验证 $q(\boldsymbol{\gamma})$ 服从贝塔分布，即

$$q(\boldsymbol{\gamma}) \sim \text{Beta}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \tag{58}$$

3) 稀疏重构信号 \mathbf{x} 的更新规则式(28)推导如下

$$\begin{aligned}
 \ln q(\mathbf{x}) &\propto \left\langle \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varepsilon}) \right\rangle_{q(\boldsymbol{\varepsilon})q(\mathbf{s})} + \\
 &\left\langle \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\tau}) \right\rangle_{q(\boldsymbol{\tau})} \propto \left\langle -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\|\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{s} \circ \mathbf{x})\|_2^2 \right\rangle_{q(\boldsymbol{\varepsilon})q(\mathbf{s})} - \\
 &\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \langle \hat{\boldsymbol{\tau}} \rangle_{q(\boldsymbol{\tau})} \mathbf{x} q(\mathbf{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T (\mathbf{D} + \hat{\boldsymbol{\mu}}) \mathbf{x} - 2\tilde{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{S}} \mathbf{H}^T \mathbf{y}}
 \end{aligned} \tag{59}$$

可以验证 $q(\mathbf{x})$ 服从高斯分布，即

$$q(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Phi}) \tag{60}$$

4) 控制稀疏信号 \mathbf{x} 的精度 $\boldsymbol{\tau}$ 更新规则式(32)推导如下

$$\begin{aligned}
 q(\boldsymbol{\tau}) &\propto \left\langle p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\tau})p(\boldsymbol{\tau}) \right\rangle_{q(\mathbf{x})q(\boldsymbol{\varepsilon})} \propto \\
 &\boldsymbol{\tau}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2)} \boldsymbol{\tau}^{a-1} e^{-b\boldsymbol{\tau}} \propto \\
 &\boldsymbol{\tau}^{\left(a + \frac{1}{2}\right) - 1} e^{-\left(b + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2)\right)\boldsymbol{\tau}}
 \end{aligned} \tag{61}$$

可以验证 $q(\boldsymbol{\tau})$ 服从伽马分布，即

$$q(\boldsymbol{\tau}) \sim \text{Gamma} \left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2) \right) \tag{62}$$

5) 噪声参数 ε 的更新规则式(34)推导如下

$$q(\varepsilon) \propto \left\langle p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{s}, \varepsilon) \right\rangle_{q(\mathbf{x})q(\mathbf{s})q(\boldsymbol{\gamma})} p(\varepsilon|c, d) \propto \frac{N}{\varepsilon^2} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon \left\langle \|\mathbf{y} - \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\mathbf{x}})\|_2^2 \right\rangle_{q(\mathbf{x})q(\mathbf{s})}} \varepsilon^{c-1} e^{-d\varepsilon} \propto \varepsilon^{\left(c + \frac{N}{2}\right) - 1} e^{-\varepsilon \left(d + \frac{1}{2} \left\langle \|\mathbf{y} - \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\mathbf{x}})\|_2^2 \right\rangle_{q(\mathbf{x})q(\mathbf{s})}} \quad (63)$$

由此可以验证 $q(\varepsilon)$ 服从伽马分布, 即

$$q(\varepsilon) \sim \text{Gamma}\left(c + \frac{N}{2}, d + \frac{1}{2} \left\langle \|\mathbf{y} - \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{s}} \circ \tilde{\mathbf{x}})\|_2^2 \right\rangle_{q(\mathbf{x})q(\mathbf{s})}\right) \quad (64)$$

附录 2 BGIG-SBL-MMV 算法各参数更新规则推导过程

1) \mathbf{s}_j 的更新规则式(38)推导如下

$$q(\mathbf{s}_j) \propto \left\langle p(\mathbf{s}_j|\boldsymbol{\gamma}_j) p(\mathbf{y}_j|\mathbf{x}_j, \mathbf{s}_j, \varepsilon_j) \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\varepsilon_j)q(\boldsymbol{\gamma}_j)} \propto s_{k,j} \left\langle \ln \gamma_{k,j} \right\rangle_{q(\boldsymbol{\gamma}_j)} (1 - s_{k,j}) \left\langle \ln(1 - \gamma_{k,j}) \right\rangle_{q(\boldsymbol{\gamma}_j)} - \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_j \left\langle \sum_{n=1}^N \left(y_{n,j} - \sum_{k=1}^K h_{nk,j} s_{k,j} x_{k,j} \right)^2 \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\mathbf{s}_j)} \quad (65)$$

其中, $h_{nk,j}$ 代表第 j 个等效信道矩阵 \mathbf{H}_j 中的第 n 行第 k 列上的元素, 从而有

$$\begin{aligned} \left\langle \ln \gamma_{k,j} \right\rangle_{q(\boldsymbol{\gamma}_j)} &\sim \text{Beta}(\alpha_{k,j}, \beta_{k,j}) = \psi(\alpha_{k,j}) - \\ \psi(\alpha_{k,j} + \beta_{k,j}) &\left\langle \ln(1 - \gamma_{k,j}) \right\rangle_{q(\boldsymbol{\gamma}_j)} \sim \\ \text{Beta}(\alpha_{k,j}, \beta_{k,j}) &= \psi(\beta_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j} + \beta_{k,j}) \end{aligned} \quad (66)$$

以及

$$q(\mathbf{s}_j) \propto e^{(s_{k,j}(\psi(\alpha_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j} + \beta_{k,j})) - (1 - s_{k,j})(\psi(\beta_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j} + \beta_{k,j})))} \cdot e^{-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_j \left\langle \|\mathbf{h}_{k,j}\|_2^2 (x_{k,j}^2 + \sigma_{k,j}^2) s_{k,j}^2 - 2(\tilde{x}_{k,j}^T \mathbf{h}_{k,j}^T \tilde{\mathbf{y}}_j) s_{k,j} \right\rangle} \quad (67)$$

同时有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_j &\in [\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \dots, \hat{\mathbf{y}}_J], \tilde{\mathbf{y}}_j = \langle \hat{\mathbf{y}}_j \rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\boldsymbol{\gamma}_j)} \\ \tilde{\mathbf{y}}_j &\in [\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_J] \end{aligned} \quad (68)$$

因为 $s_{k,j}$ 是一个随机的二元伯努利变量, 有

$$\begin{aligned} q(\mathbf{s}_j) &\propto e^{\psi(\beta_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j} + \beta_{k,j})}, s_{k,j} = 0 \\ q(\mathbf{s}_j) &\propto e^{\psi(\alpha_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j} + \beta_{k,j}) - \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_j \left\langle \|\mathbf{h}_{k,j}\|_2^2 (x_{k,j}^2 + \sigma_{k,j}^2) - 2(\tilde{x}_{k,j}^T \mathbf{h}_{k,j}^T \tilde{\mathbf{y}}_j) \right\rangle} \\ s_{k,j} &= 1 \end{aligned} \quad (69)$$

由此可以验证

$$q(s_{k,j}) \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{1 + e^{\psi(\beta_{k,j}) - \psi(\alpha_{k,j}) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_j \left\langle \|\mathbf{h}_{k,j}\|_2^2 (x_{k,j}^2 + \sigma_{k,j}^2) - 2(\tilde{x}_{k,j}^T \mathbf{h}_{k,j}^T \tilde{\mathbf{y}}_j) \right\rangle}}\right) \quad (70)$$

2) $\boldsymbol{\gamma}_j$ 的更新规则式(40)推导如下

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{\gamma}_j) &\propto \left\langle p(\mathbf{s}_j|\boldsymbol{\gamma}_j) \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\mathbf{s}_j)} p(\boldsymbol{\gamma}_j|\alpha_0, \beta_0) \propto \\ \boldsymbol{\gamma}_j^{\tilde{s}_j} (1 - \boldsymbol{\gamma}_j)^{1 - \tilde{s}_j} \boldsymbol{\gamma}_j^{\alpha_0 - 1} (1 - \boldsymbol{\gamma}_j)^{\beta_0 - 1} &\propto \\ \boldsymbol{\gamma}_j^{(\alpha_0 + \tilde{s}_j) - 1} (1 - \boldsymbol{\gamma}_j)^{(\beta_0 + 1 - \tilde{s}_j) - 1} &\quad (71) \end{aligned}$$

则可以验证 $q(\boldsymbol{\gamma}_j) \sim \text{Beta}(\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_j)$ 。

3) \mathbf{x}_j 的更新规则为

$$\begin{aligned} \ln q(\mathbf{x}_j) &\propto \ln \left\langle p(\mathbf{y}_j|\mathbf{x}_j, \mathbf{s}_j, \varepsilon_j) \right\rangle_{q(\varepsilon_j)} + \ln \left\langle p(\mathbf{x}_j|\boldsymbol{\tau}) \right\rangle_{q(\boldsymbol{\tau})} \propto \\ \left\langle -\frac{1}{2}\varepsilon_j \left\| \mathbf{y}_j - \mathbf{H}_j(\mathbf{s}_j \circ \mathbf{x}_j) \right\|_2^2 \right\rangle_{q(\varepsilon_j)q(\mathbf{s}_j)} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_j^T \langle \hat{\boldsymbol{\tau}} \rangle_{q(\boldsymbol{\tau})} & \\ \mathbf{x}_j &\propto -\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_j \left(\mathbf{x}_j^T \langle \mathbf{S}_j \mathbf{H}_j^T \mathbf{H}_j \mathbf{S}_j \rangle_{q(\mathbf{s}_j)} \mathbf{x}_j - 2 \mathbf{x}_j^T \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{H}_j^T \tilde{\mathbf{y}}_j \right) - \\ \frac{1}{2} \mathbf{x}_j^T \mathbf{D} \mathbf{x}_j q(\mathbf{x}_j) &\propto e^{\frac{1}{2} \mathbf{x}_j^T (\mathbf{D} + \tilde{\varepsilon}_j \boldsymbol{\mu}_j) \mathbf{x}_j - 2 \tilde{\varepsilon}_j \mathbf{x}_j^T \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{H}_j^T \tilde{\mathbf{y}}_j} \quad (72) \end{aligned}$$

由此, 如式(41), 可验证

$$q(\mathbf{x}_j) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{x}}_j, \boldsymbol{\Phi}_j) \quad (73)$$

4) $\boldsymbol{\tau}$ 的更新规则式(45)推导如下

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{\tau}) &\propto \left\langle p(\mathbf{x}_j|\boldsymbol{\tau}) \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)} \\ p(\boldsymbol{\tau}|a, b) &\propto \boldsymbol{\tau}^{\frac{J}{2}} e^{-\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \sum_{j=1}^J \tilde{\mathbf{x}}_j^2 + \sigma_j^2} \\ \boldsymbol{\tau}^{a-1} e^{-b\boldsymbol{\tau}} &\propto \boldsymbol{\tau}^{a + \frac{J}{2} - 1} e^{-\left(b + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \tilde{\mathbf{x}}_j^2 + \sigma_j^2\right) \boldsymbol{\tau}} \end{aligned} \quad (74)$$

通过推导可得

$$q(\boldsymbol{\tau}) \sim \text{Gamma}\left(a + \frac{J}{2} - 1, b + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \tilde{\mathbf{x}}_j^2 + \sigma_j^2\right) \quad (75)$$

5) ε_j 的更新规则式(47)推导如下

$$\begin{aligned} q(\varepsilon_j) &\propto \left\langle p(\mathbf{y}_j|\mathbf{x}_j, \mathbf{s}_j, \varepsilon_j) \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\mathbf{s}_j)q(\boldsymbol{\gamma}_j)} \\ p(\varepsilon_j|c, d) &\propto \varepsilon_j^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_j \left\langle \|\mathbf{y}_j - \mathbf{H}_j(\mathbf{s}_j \circ \mathbf{x}_j)\|_2^2 \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\mathbf{s}_j)}} \varepsilon_j^{c-1} e^{-d\varepsilon_j} \propto \\ \varepsilon_j^{\left(c + \frac{N}{2}\right) - 1} e^{-\varepsilon_j \left(d + \frac{1}{2} \left\langle \|\mathbf{y}_j - \mathbf{H}_j(\tilde{\mathbf{s}}_j \circ \tilde{\mathbf{x}}_j)\|_2^2 \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\mathbf{s}_j)}} &\quad (76) \end{aligned}$$

由此, 可以验证

$$q(\varepsilon_j) \sim \text{Gamma}\left(c + \frac{N}{2}, d + \frac{1}{2} \left\langle \|\mathbf{y}_j - \mathbf{H}_j(\tilde{\mathbf{s}}_j \circ \tilde{\mathbf{x}}_j)\|_2^2 \right\rangle_{q(\mathbf{x}_j)q(\mathbf{s}_j)}\right) \quad (77)$$

参考文献:

- [1] DAI L L, WANG B C, YUAN Y F, et al. Non-orthogonal multiple

- access for 5G: solutions, challenges, opportunities, and future research trends[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2015, 53(9): 74-81.
- [2] 范平志, 李里, 陈欢, 等. 面向大规模物联网的随机接入: 现状、挑战与机遇[J]. *通信学报*, 2021, 42(4): 1-21.
- FAN P Z, LI L, CHEN H, et al. Random access for massive Internet of Things: current status, challenges and opportunities[J]. *Journal on Communications*, 2021, 42(4): 1-21.
- [3] YANG Y, WU G, LI X, et al. A survey of non-orthogonal multiple access technology for beyond-5G[J]. *Radio Communications Technology*, 2020, 46(1): 26-34.
- [4] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [5] DONOHO D L, TSAIG Y, DRORI I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [6] WANG B C, DAI L L, MIR T, et al. Joint user activity and data detection based on structured compressive sensing for NOMA[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(7): 1473-1476.
- [7] CIRIK A C, BALASUBRAMANYA N M, LAMPE L. Multi-user detection using ADMM-based compressive sensing for uplink grant-free NOMA[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2018, 7(1): 46-49.
- [8] AHN J, SHIM B, LEE K B. EP-based joint active user detection and channel estimation for massive machine-type communications[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2019, 67(7): 5178-5189.
- [9] 戴维佳, 李乐天, 周武旸. 基于期望传播的活跃用户检测和信道估计[J]. *中国科学技术大学学报*, 2019, 49(10): 797-804.
- DAI W J, LI L T, ZHOU W Y. Active user detection and channel estimation based on expectation propagation[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2019, 49(10): 797-804.
- [10] HASAN S M, MAHATA K, HYDER M M. Uplink grant-free NOMA with sinusoidal spreading sequences[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, 69(6): 3757-3770.
- [11] TIPPING M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2001, 1(6): 211-244.
- [12] WIPF D P, RAO B D. Sparse Bayesian learning for basis selection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(8): 2153-2164.
- [13] WIPF D P, RAO B D. An empirical Bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3704-3716.
- [14] ZHANG Z L, RAO B D. Sparse signal recovery with temporally correlated source vectors using sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(5): 912-926.
- [15] FANG J, SHEN Y N, LI F W, et al. Support knowledge-aided sparse Bayesian learning for compressed sensing[C]//*Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. Piscataway: IEEE Press, 2015: 3786-3790.
- [16] FANG J, SHEN Y N, LI H B, et al. Pattern-coupled sparse Bayesian learning for recovery of block-sparse signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(2): 360-372.
- [17] AL-SHOUKAIRI M, SCHNITER P, RAO B D. A GAMP-based low complexity sparse Bayesian learning algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(2): 294-308.
- [18] ZHANG X X, FAN P Z, HAO L, et al. Two efficient Bayesian multiuser detection algorithms for machine-type communications[C]//*Proceedings of 2021 IEEE 94th Vehicular Technology Conference*. Piscataway: IEEE Press, 2021: 1-5.
- [19] ZHANG X X, LABEAU F, HAO L, et al. Joint active user detection and channel estimation via Bayesian learning approaches in MTC communications[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021, 70(6): 6222-6226.
- [20] ZHANG X X, FAN P Z, LIU J Q, et al. Bayesian learning-based multiuser detection for grant-free NOMA systems[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2022, 21(8): 6317-6328.
- [21] SANT A, LEINONEN M, RAO B D. Block-sparse signal recovery via general total variation regularized sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 1056-1071.
- [22] CHEN S, CEN Z G, LI H J, et al. Sparse Bayesian learning based on fast marginal likelihood maximization for joint user activity detection and channel estimation in grant-free NOMA[C]//*Proceedings of 15th International Congress on Image and Signal Processing, BioMedical Engineering and Informatics (CISP-BMEI)*. Piscataway: IEEE Press, 2022: 1-6.
- [23] SHIM B, SONG B. Multiuser detection via compressive sensing[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(7): 972-974.
- [24] 高鹏宇. 压缩感知辅助的非正交多址接入检测技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2019.
- GAO P Y. Research on non-orthogonal multiple access detection technology assisted by compressed sensing[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2019.
- [25] SHEKARAMIZ M, MOON T K. Compressive sensing via variational Bayesian inference under two widely used priors: modeling, comparison and discussion[J]. *Entropy*, 2023, 25(3): 511.
- [26] GLAUBITZ J, GELB A. Leveraging joint sparsity in hierarchical

Bayesian learning[J]. arXiv Preprint, arXiv: 2303.16954, 2023.

- [27] SHEKARAMIZ M, MOON T K. Compressive sensing via variational Bayesian inference[C]//Proceedings of 2020 Intermountain Engineering, Technology and Computing (IETC). Piscataway: IEEE Press, 2020: 1-6.

[作者简介]



陈平平 (1986-), 男, 福建泉州人, 博士, 福州大学教授、博士生导师, 主要研究方向为压缩感知、无线通信、信道编码调制、多用户接入。



王宣达 (1998-), 男, 山西吕梁人, 福州大学硕士生, 主要研究方向为压缩感知、无线通信、多用户接入。



谢肇鹏 (1995-), 男, 福建晋江人, 福州大学讲师, 主要研究方向为压缩感知、无线通信、多用户接入。



方毅 (1986-), 男, 广东广州人, 广东工业大学教授、博士生导师, 主要研究方向为信道编码与调制、无线通信、机器学习。



陈家辉 (1998-), 男, 福建龙岩人, 福州大学硕士生, 主要研究方向为压缩感知、无线通信、多用户接入。